18/4/2018

Ορισμός Δύο ομάδες G_1, G_2 λέγονται ισόμορφες, αν υπάρχει ισομορφισμός $\varphi : G_1 \to G_2$, και συμβολίζεται με: $\boxed{G_1 \simeq G_2}$.

Θεώρημα Η σχέση ισομορφίας ομάδων είναι σχέση ισοδυναμίας, στο σύνολο όλων των ομάδων!

Απόδειξη ($\simeq$: ανακλαστική):

- Θεωρώ την ταυτοτική απεικόνιση $Id(g) = g$, τ/ω: $G \xrightarrow{Id} G$. Έχουμε, λοιπόν, ότι:

$\rightarrow$ $Id(ab) = ab = Id(a) \cdot Id(b) \Rightarrow \boxed{Id : \text{ομομορφισμός}}$

$\rightarrow$ $Ker(Id) = \{a \in G \mid Id(a) = e\} = \{a \in G \mid a = e\} = \{e\}$

$\Rightarrow \boxed{Id : \text{"1-1"}}$

$\rightarrow$ Έστω $x \in G$. Τότε: $Id(x) = x \Rightarrow \boxed{Id : \text{επί}}$

- Άρα, Id: ισομορφισμός $\Rightarrow \boxed{G \simeq G}$

($\simeq$: συμμετρική): Έστω $G_1 \simeq G_2 \Rightarrow$ υπάρχει ισομορφισμός φ από την G_1 στην G_2

- φ: ισομορφισμός $\Rightarrow \begin{cases} \varphi : \text{"1-1"} \\ \varphi : \text{επί} \end{cases} \Rightarrow$ Ορίζεται η $\varphi^{-1} : G_2 \to G_1$

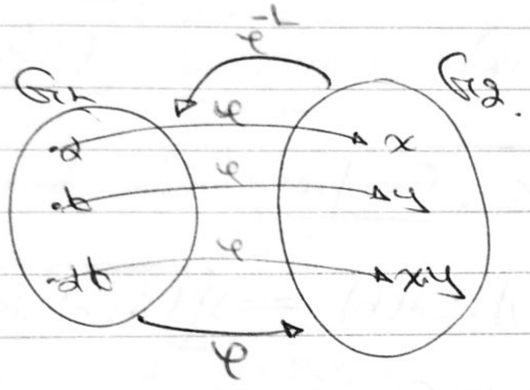
• Καλώς η φ είναι "1-1" και επί, τότε αναγκαστικά η φ^{-1} είναι "1-1" και επί.

Έστω: $x, y \in G_2 \Rightarrow$ Υποθέτω ότι $\varphi^{-1}(x) = \varphi^{-1}(y) \Rightarrow$

$\underset{\varphi: \text{"1-1"}}{\Rightarrow} \varphi \circ \varphi^{-1}(x) = \varphi \circ \varphi^{-1}(y) \Rightarrow Id(x) = Id(y) \Rightarrow x = y$

$\Rightarrow \boxed{\varphi^{-1} : 1\text{-}1}$

Έστω: $\alpha \in G_1 \Rightarrow \varphi^{-1}(\varphi(\alpha)) = \alpha \Rightarrow \boxed{\varphi^{-1} : \text{επί}}$



Έχω:

$$\left.\begin{aligned} \varphi^{-1}(xy) &= \alpha b \\ \varphi^{-1}(x)\cdot\varphi^{-1}(y) &= \alpha \cdot b \end{aligned}\right\} \boxed{\varphi^{-1} : \text{ομομορφισμός}}$$

• Απέδειξα, λοιπόν, ότι:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi^{-1} : \text{ομομορφισμός} \\ &\varphi^{-1} : \text{"1-1"} \\ &\varphi^{-1} : \text{επί} \end{aligned}\right\} \boxed{\varphi^{-1} : \text{ισομορφισμός}}$$

• Συνεπώς, η $\varphi^{-1} : G_2 \to G_1$ είναι ισομορφισμός $\Rightarrow \boxed{G_2 \simeq G_1}$

$\boxed{\simeq : \text{μεταβατική}}$ Θέλω να αποδείξω ότι:

Αν $G_1 \simeq G_2$ & $G_2 \simeq G_3 \Longrightarrow G_1 \simeq G_3$

• Έχω: $G_1 \simeq G_2 \Rightarrow \exists\, \varphi$: ισομορφισμός, από $G_1 \longrightarrow G_2$

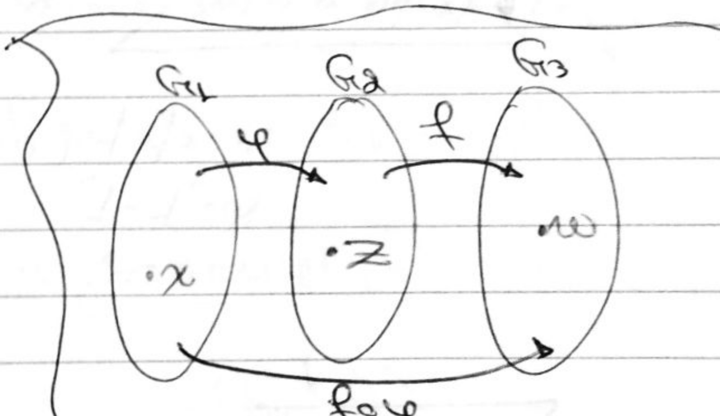
$G_2 \simeq G_3 \Rightarrow \exists\, f$: ισομορφισμός, από $G_2 \longrightarrow G_3$.

• Θεωρώ την απεικόνιση $f \circ \varphi : G_1 \longrightarrow G_3$, η ...

οποία, προφανώς, είναι θετική. Ν.δ.ο.: $f \circ \varphi$: ισομορφισμός

→ Έστω: $f \circ \varphi(a) = f \circ \varphi(b) \xRightarrow{f:\text{"1-1"}} \varphi(a) = \varphi(b)$

$\xRightarrow{\varphi:\text{"1-1"}} a = b \Longrightarrow \boxed{f \circ \varphi : \text{"1-1"}}$



→ Θεωρώ: $\omega \in G_3$

$\xrightarrow{f:\text{επί}} (\exists\, z \in G_2) : \boxed{f(z) = \omega}$

• φ: επί $\Rightarrow \exists\, x \in G_1$:
τέτοιο: $\boxed{\varphi(x) = z}$

• Τότε: $f \circ \varphi(x) = f(\varphi(x)) = f(z) = \omega$

• Άρα: $f \circ \varphi$ είναι επί!!!

→ Θεωρώ : $\alpha, b \in G_1$ και έχω:

• $f\circ\varphi(\alpha\cdot b) = f(\varphi(\alpha\cdot b)) \overset{\varphi:\text{ομομορφισμός}}{=} f(\varphi(\alpha)\cdot\varphi(b))$

$\overset{f:\text{ομομορφισμός}}{=} f(\varphi(\alpha))\cdot f(\varphi(b)) = f\circ\varphi(\alpha)\cdot f\circ\varphi(b)$

Άρα η $f\circ\varphi$ είναι ισομορφισμός.

Συνεπώς : $\boxed{G_1 \simeq G_3}$

• Εν τέλει, αποδείξαμε ότι η σχέση ισομορφίας είναι σχέση ισοδυναμίας !!!

▶ **Παράδειγμα** $(\mathbb{R},+) \xrightarrow{\varphi} (\mathbb{R}^+,\cdot)$, με $\boxed{\varphi(x) = e^x}$.

$\left.\begin{array}{l} \varphi:\text{ομομορφισμός} \\ \varphi:\text{"1-1"} \\ \varphi:\text{επί} \end{array}\right\} \Longrightarrow \varphi:\text{ισομορφισμός!}$

▶ **Θεώρημα** Έστω $G_1 \simeq G_2$ και G_1: αβελιανή

Τότε και G_2: αβελιανή

▸ <u>Απόδειξη</u>: Έστω $x, y \in G_2$. Η $G_1 \cong G_2 \Longrightarrow$

$\Rightarrow$ υπάρχει ισομορφισμός $\varphi: G_1 \to G_2$

• <u>Έχω</u>: $x, y \in G_2$ και φ: επί $\Rightarrow$ υπάρχουν $a, b \in G_1$, τέτοια, ώστε: $\varphi(a) = x$ & $\varphi(b) = y$

• <u>Άρα</u>: $x \cdot y = \varphi(a) \cdot \varphi(b) \xlongequal{\varphi:\text{ομομορφισμός}} \varphi(a \cdot b) \xlongequal{G_1:\text{αβελιανή}} \varphi(b \cdot a)$

$\xlongequal{\varphi:\text{ομομορφισμός}} \varphi(b) \cdot \varphi(a) = y \cdot x \Rightarrow \boxed{G_2: \text{αβελιανή}}$

$\boxed{\text{▸Θεώρημα}}$ Έστω $G_1 \cong G_2$ και G_1: κυκλική. Τότε και η G_2: κυκλική.

▸ <u>Απόδειξη</u>: G_1: κυκλική $\Rightarrow G_1 = \langle a \rangle = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

• $G_1 \cong G_2 \Rightarrow \exists\, \varphi$: ισομορφισμός, από το $G_1 \to G_2$.

• Θα αποδείξουμε ότι $G_2 = \langle \varphi(a) \rangle$!

$\rightarrow$ Αφού $\varphi(a) \in G_2 \Longrightarrow \boxed{\langle \varphi(a) \rangle \subseteq G_2}$ (1)

$\rightarrow$ • Έστω $g \in G_2$ και φ: επί. Άρα, υπάρχει $x \in G_1$, τ/ω:

$$\boxed{\varphi(x) = g}$$

• Επίσης: $x \in G_1 \Rightarrow \boxed{x = a^m}$, για κάποιο $m \in \mathbb{Z}$.

• <u>Συνεπώς</u>: $g = \varphi(x) = \varphi(a^m) = (\varphi(a))^m \Rightarrow \boxed{G_2 \subseteq \langle \varphi(a) \rangle}$ (2)

Από (1) και (2) $\Longrightarrow \boxed{G_2 = \langle \varphi(a) \rangle} \Rightarrow$ <u>G_2: κυκλική</u>!!!

Θεώρημα: Κάθε άπειρη κυκλική ομάδα είναι ισόμορφη με το $(\mathbb{Z},+)$.

Απόδειξη: $\mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} G=\langle\alpha\rangle=\{\dots,\alpha^{-2},\alpha^{-1},\alpha^{0},\alpha,\alpha^{2},\dots,\alpha^{n},\dots\}$.

- Θεωρώ την απεικόνιση $\boxed{\varphi(n)=\alpha^{n}}$ και έχω:

→ $\varphi(n+m)=\alpha^{n+m}=\alpha^{n}\cdot\alpha^{m}=\varphi(n)\cdot\varphi(m) \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\varphi:\text{ομομορφισμός}}$

→ Έστω $g\in G=\langle\alpha\rangle \Rightarrow g=\alpha^{m}=\varphi(m) \Rightarrow \boxed{\varphi(m)=g}$

$\Rightarrow \boxed{\varphi:\text{επί}}$

→ Έχω: $\operatorname{Ker}\varphi=\{n\in\mathbb{Z} \mid \varphi(n)=1\}=\{n\in\mathbb{Z} \mid \alpha^{n}=1\}=$

$=\{0\}$

$\Rightarrow \boxed{\varphi:\text{"1-1"}}$

- Άρα φ: ισομορφισμός $\Rightarrow \boxed{G=\langle\alpha\rangle\cong(\mathbb{Z},+)}$

Θεώρημα Κάθε πεπερασμένη κυκλική ομάδα τάξης n, είναι ισόμορφη με την $\mathbb{Z}_n$.

Απόδειξη: Έστω $G = \langle a \rangle$, όπου $ord(a) = n$.

- Θεωρώ την απεικόνιση: $\boxed{\varphi(a^k) = [k]_n}$ και έχω:

→ Έχω $\varphi(a^{k+s}) = \varphi(a^k \cdot a^s) = [k+s]_n = [k]_n + [s]_n =$

$$= \varphi(a^k) + \varphi(a^s)$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi : \text{ομομορφισμός}}$$

→ Έχω $G_2 \ni [x]_n = \varphi(a^x) \in G_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi : \text{επί}}$$

→ Έχω: $\varphi(a^k) = \varphi(a^s) \Rightarrow [k]_n = [s]_n \Rightarrow$

$$\Rightarrow k \equiv s \bmod n$$
$$\Rightarrow \boxed{k = s + \lambda n}$$

- Συνεπώς: $a^k = a^{s+\lambda n} = a^s \cdot a^{\lambda n} = a^s \cdot (\cancel{a^n})^{\lambda} = a^s$

$$\Rightarrow \boxed{k = s} \Rightarrow \boxed{\varphi : 1-1}$$

- Άρα φ: ισομορφισμός $\Rightarrow \boxed{G \simeq \mathbb{Z}_n}$